Mathematisches Vertiefungsseminar
Sommersemester 2022

Prof. Dr. Thomas Walpuski

2022-04-05

Allgemeines

Auf den vorläufigen Vortragsplan folgt eine Liste von Themenvorschlägen. Lesen Sie sich diese bitte sorgfältig durch und überlegen Sie, welche Themen für Sie in Frage kommen. Für alternative Themenvorschläge bin ich offen. Sie sollten mich dann aber vor dem ersten Treffen am 21.4 diesbezüglich kontaktieren. Die Reihenfolge der Themen ist nicht in Stein gemeiselt, aber der Vortrag am 28.4 ist absichtlich so gewählt, dass man ihn auch in kurzer Zeit vorbereiten kann, und einige der anderen Vorträge gehören thematisch zu einander. Die Verteilung der Themen erfolgt im ersten Treffen.

Auch wenn ich davon ausgehe, dass Sie als angehende Lehrer Fachleute im Halten von Vorträgen sind, empfehle ich sich die Hinweise und Ratschläge in [Leh] zubeherzigen. Die folgenden Themenvorschläge haben Links und Literaturverweise. Es ist Teil ihrer Aufgabe, sich selbstständig weitere Quellen zu suchen bzw. die Literaturlisten in den Quellen nachzuverfolgen. Kopieren Sie nicht einfach blind aus den Quellen nur um einen gewissen Umfang zu erreichen. Wenn Sie zugunsten eines tieferen Verständnis auf einen Teil des Inhaltsverzichten müssen oder wollen, ist mir das recht. Sie müssen keine formale Ausarbeitung zu Ihrem Thema schreiben, aber es ist für Ihre Vorbereitung vielleicht dennoch sinnvoll.

Literatur

[Leh] M. Lehn. *Wie halte ich einen Seminarvortrag?* (cit. on p. 1)

Vorläufiger Vortragsplan

28.4 Eulers Reihe

5.5 Das Brachistochronenproblem

12.5 Buffonsches Nadelproblem

1

Themenvorschlag: Eulers Reihe

Keywords: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Analysis

Es ist selbst heute noch recht schwierig, die Werte der Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

explizit zu berechnen. Doch schon 1734 zeigte Euler dass

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

gilt. Für diese faszinierende Formel gibt es nunmehr eine unüberschaubare Fülle an Beweisen. In Aigner and Zieglers wunderbarem BUCH der Beweise finden Sie drei [AZ15, Kapitel 8]. Die Aufgabe der bzw. des ersten Vortragende ist es einfach diese drei Beweise im Detail zu erklären und eventuelle Auslassungen, Verkürzungen, usw. in [AZ15, Kapitel 8] auszufüllen.

Literatur

[AZ15] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise.* Springer Spektrum, 2015. DOI: 10.1007/978-3-662-44457-3. Zbl: 1297.00006 (cit. on p. 3)

2
Themenvorschlag: Das Brachistochronenproblem

Keywords: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Analysis, Variationsrechnung

---

Königsberger [Kön04, §12.1 Beispiel 4] gibt die Formulierung des Brachistochronenproblems durch Johann Bernoulli im Jahre 1696 wie folgt wieder:

> Ein Massenpunkt gleite unter dem Einfluß der Schwerkraft und ohne Reibung längs gewisser Kurven von einem festen Punkt A zu einem festen tieferen Punkt B. Für welche Kurven wird die Laufzeit am kürzesten?

Diese Fragestellung ist historisch von großer Bedeutung, denn sie führte zur Entwicklung der Variationsrechnung—ein bis heute sehr aktives Forschungsgebiet in der Mathematik. Das MacTutor History of Mathematics Archive hat eine kurze Ausführung zur Geschichte.

Newton, Jakob Bernoulli, Leibniz, von Tschirnhaus und l'Hôpital anworteten auf Johann Bernoullis Herrausforderung und reichten Lösungen des Brachistochronenproblems ein. Ihre Antwort ist jeweils (ein Teil) einer (umgedrehten) Zykloide. Die Herleitungen sind jedoch nicht identisch.

Die (umgedrehte) Zykloide hat folgende faszinierende Eigenschaft: von jedem Anfangspunkt geleitet ein Massenpunkt unter dem Einfluß der Schwerkraft und ohne Reibung in der geleichen Zeit zum tiefsten Punkt. Das heißt die Zykloide ist auch eine *Tautochrone*.

Auf Basis der Zykloide entwickelde Huygens ein Pendel dessen Schwingungsdauer unabhängig von der Auslenkung ist (das Zykloidenpendel). Dies ist nur eine von vielen Anwendungen der Zykloide.

Möglicher Vortragsplan

(1) Erklären Sie das Brachistochronenproblem im Detail. Formulieren Sie es mathematisch präzise.

(2) Diskutieren Sie im Detail zwei Lösungen des Problems in moderner mathematischer Sprache (d.h. so wie sie es bisher in Ihrem Studium gelernt haben).

(3) Diskutieren Sie die Tautochronie der Zykloide.

(4) Beschreiben Sie das Zykloidenpendel und diskutieren Sie den mathematisch-physikalischen Hintergrund.

(*) Sie finden zu diesem Thema eine Vielzahl von Illustrationen, Experimenten, usw. für die Allgemeinheit. Ebenso finden Sie eine Unmenge an faszinierende historischen Details. Zögern Sie nicht, Ihren Vortrag dadurch zu bereichern.

Literatur

[Kön04] K. Königsberger. *Analysis 1.* Springer-Lehrbuch. Springer, 2004. Zbl: 1095.26500 (cit. on p. 4)

3
Themenvorschlag: Buffonsches Nadelproblem

Keywords: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Wahrscheinlichkeitstheorie, Analysis

Das buffonsche Nadelproblem fragt nach der Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig auf liniertes Papier geworfene kurze Nadel auf einer der Linien zu liegen kommt. Diese Formulierung bedarf natürlich einer Präzisierung, insbesondere muß man die Länge der Nadel und den Abstand der Linien bezeichnen, z.B. mit ℓ und d, erklären was "kurz" bedeutet ($\ell < d$), usw. Die Antwort auf die Frage lautet schließlich

$$p = \frac{2}{\pi}\frac{\ell}{d}.$$

Eine amüsante aber unpraktikable Anwendung der obigen Formel ist ein Monte-Carlo-Verfahren zur experimentellen Bestimmung von π durch wiederholtes Nadelwerfen und mitzählen.

Die obige Antwort lässt sich direkt durch Integration berechnen. Einen eleganteren Beweis, der ohne Integration auskommt, fand Barbier [Bar60]. Sie finden eine moderne Ausführung dieses Beweises in [AZ15, Kapitel 24].

Aus der Betrachtung des buffonschen Nadelproblems ging auch Croftons Formel zur Berechnung der Bogenlänge einer Kurve in der Ebene hervor [Cro69]. Alldas ist der Ausgangspunkt der Integralgeometrie—ein bis heute aktiv beforschtes Gebiet der Mathematik.

(1) Präzisieren Sie das buffonschenadel Problem und erklären Sie dabei die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitstheorie.

(2) Beweisen Sie die Formel $p = \frac{2}{\pi}\frac{\ell}{d}$ durch direkte Integration.

(3) Diskutieren sie den Beweis von Barbier im Detail.

(4) Erklären Sie Croftons Formel und beweisen Sie diese (falls es die Zeit zulässt).

Literatur

[AZ15] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise.* Springer Spektrum, 2015. DOI: 10.1007/978-3-662-44457-3. Zbl: 1297.00006 (cit. on p. 6)

[Bar60] E. Barbier. *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. J. Mathématiques Pures et Appliquées* 2 (5 1860), pp. 273–286 (cit. on p. 6)

[Cro69] M. W. Crofton. *On the theory of local probability.* English. *Proceedings of the London Mathematical Society* 2 (1869), pp. 54–57 (cit. on p. 6)

4
Themenvorschlag: Das Lemma von Sperner und der Fixpunktsatz von Brouwer

Keywords: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Topologie Kombinatorik

---

Der Fixpunktsatz von Brouwer besagt, dass jede stetige Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ von der Einheitskugel $D^n := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leqslant 1\}$ in sich selbst einen Fixpunkt hat, d.h., ein $x \in D^n$ mit $f(x) = x$. Dieser Satz ist ein wichtiges abstraktes Existenzresultat und findet vielfältige Anwendungen. Mit Hilfe der hochgezüchteten Maschinerie der algebraischen Topologie gelingt der Beweis im Hand umdrehen. Es gibt allerdings auch einige elegante elementare Beweise, z.B. den von Sperner [Spe28].

Sperners Beweis basiert auf einem kombinatorischen Argument. Ein n–dimensionales Simplex ist die konvexe Hülle von $n+1$ Punkten $v_0, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^n$ (in allgemeiner Lage):

$$\Delta := \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i : \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Jedes Simplex Δ lässt sich in kleinere Simplices $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ unterteilen. Sei E die Menge aller Ecken dieser Simplices. Eine *Spernersche Färbung* ist eine Abbildung $f\colon E \to \{0, \ldots, n\}$ so dass folgendes gilt:

(1) Die Ecken des großen Simplex Δ sind wie folgt gefärbt: $f(v_i) = i$.

(2) Falls $e_0, \ldots, e_k \in E$ in einer der Seiten des k–dimensionalen Seiten des großen Simplex Δ, auf gespannt durch $v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}$, liegen, dann dürfen für $e_0, \ldots, e_k$ nur die entsprechenden Farben benutzt werden, d.h., $f(e_i) \in \{i_0, \ldots, i_k\}$.

Um diese Bedingungen zu durchdringen, bietet es sich an einige Beispiele zu betrachten, z.B. in diesem Video von 1982. Das Lemma von Sperner besagt, dass jede Unterteilung in kleinere Simplices immer eine Spernersche Färbung zulässt. Einen eleganten Beweis findet man in [AZ15, Kapitel 25 §6]. Das Lemma von Sperner erlaubt dann einen Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer.

Möglicher Vortragsplan

(1) Erklären Sie den Fixpunktsatz von Brouwer und diskutieren Sie gern auch ein paar Anwendungen.

(2) Diskutieren Sie im Detail die Formulierung des Lemmas von Sperner und die darin vorkommenden Begriffe.

(3) Beweisen Sied das Lemma von Sperner.

(4) Beweisen Sie den Fixpunktsatz von Brouwer mit Hilfe des Lemmas von Sperner.

Literatur

[AZ15] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise.* Springer Spektrum, 2015. DOI: 10.1007/978-3-662-44457-3. Zbl: 1297.00006 (cit. on p. 7)

[Spe28] E. Sperner. *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 6 (1928), pp. 265–272. DOI: 10.1007/BF02940617 (cit. on p. 7)

5

Themenvorschlag: Der Satz von Borsuk–Ulam

Keywords: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Topologie, Kombinatorik

Der Satz von Borsuk–Ulam besagt dass es für jede stetige Abbildung $f\colon S^n \to \mathbf{R}^n$ einen Punkt $x \in S^n$ gibt mit $f(x) = f(-x)$. Als Folgerung kann man (unter vernünftigen Annahmen) ableiten, dass es zu jedem Zeitpunkt auf der Erdoberfläche zwei antipodale Punkte gibt an denen sowohl die Temperatur als auch der Luftdruck übereinstimmen. Eine weitere Folgerung ist der Satz von Stone–Tukey ("ham sandwich theorem"): sind n messbare kompakte Mengen in $\mathbf{R}^n$ gegeben, so gibt es eine Hyperebene die jede dieser Mengen genau halbiert. Eine äquivalente Formulierung (von vielen) des Satzes von Borsuk–Ulam ist dass es für jede ungerade stetige Abbildung $g\colon S^n \to \mathbf{R}^n$ ein $x \in S^n$ mit $f(x) = 0$ gibt. Als solches gibt der Satz ein einfaches Kriterium für die abstrakt Existenz von Lösungen von Gleichungssystemen.

Der Beweis des Satzes von Borsuk–Ulam in kann mit der hochgezüchteten Machinerie der algebraischen Topologie in nur wenigen Zeilen geführt werden. Allerdings gibt auch einige recht elementare Beweise. Der Satz ist z.B. äquivalent zum Lemma von Tucker in der Kombinatorik über Triangulierungen [Tuc46]. Letzteres erlaubt einen direkten algorithmischen Beweis; siehe z.B. die Arbeiten von Freund and Todd [FT81] oder Fan [Fan52].

Möglicher Vortragsplan

(1) Erklären Sie den Satz von Borsuk–Ulam.

(2) Diskutieren und beweisen sie die oben erwähnten Anwendungen und äquivalenten Umformungen des Satzes von Borsuk–Ulam.

(3) Beweisen Sie, dass der Satz von Borsuk–Ulam äquivalent zum Lemma von Tucker ist (oder wenigstens, dass er aus letzterem folgt).

(4) Beweisen Sie das Lemma von Tucker.

Literatur

[Fan52] K. Fan. *A generalization of Tucker's combinatorial lemma with topological applications.* English. *Annals of Mathematics. Second Series* 56 (1952), pp. 431–437. DOI: 10.2307/1969651. Zbl: 0047.42004 (cit. on p. 9)

[FT81] R. M. Freund and M. J. Todd. *A constructive proof of Tucker's combinatorial lemma. Journal of Combinatorial Theory. Series A* 30 (1981), pp. 321–325. DOI: 10.1016/0097-3165(81)90027-3. Zbl: 0462.05026 (cit. on p. 9)

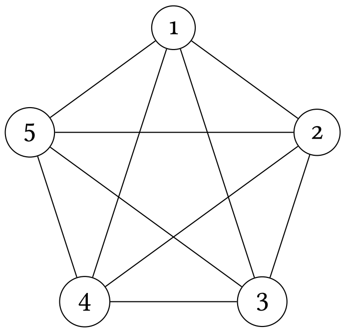
[Tuc46] A. W. Tucker. *Some topological properties of disk and sphere. Proc. First Canadian Math. Congress, Montreal, 1945.* University of Toronto Press, 1946, pp. 285–309. MR: 0020254. Zbl: 0061.40305 (cit. on p. 9)

6

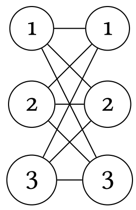
Themenvorschlag: Planare Graphen

Keywords: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Graphentheorie

Ein abstrakter Graph besteht aus einer Menge von Ecken (vertices) und einer Menge von Kanten (edges) zwischen diesen Ecken. Die Graphentheorie beschäftigt sich mit vielfältigen Fragestellungen rund um diese Objekte. Sie ist zum einen offensichtlich anwendungsrelevant (man denke nur an Kommunikationsnetze) und zum anderen theoretisch sehr interessant. Hier ist eine konkrete Frage: Lässt sich jeder abstrakte Graph konkret in der zweidimensionalen Ebene realisieren? (Im dreidimensionalen Raum ist das geht das offensichtlich.) Die Antwort lautet: *nein!* In der Tat findet man schnell Kandidaten für Gegenbeispiele, z.B. den vollständigen Graph K_5 und den vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$. In folgenden beinahe Realisierungen dieser Graphen scheiden sich die Kanten.



(a) K_5



(b) $K_{3,3}$

Graphen, die sich konkret in der zweidimensionalen Ebene realisieren heißen **planar**. Die Eulersche Polyederformel ist ein wichtiges Ausschlußkriterium für planare Graphen [Ihr02, Kapitel I 4.3; AZ15, Kapitel 12]. Sie impliziert z.B. das K_5 und $K_{3,3}$ nicht planar sind. Der Satz von Kuratowksi besagt, dass ein Graph genau dann palanar ist wenn er weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Untergraph enthält; siehe z.B. [Kre19, §2.5]. Dieser Satz ist von großer Bedeutung denn er erlaubt es in linearer Zeit zu prüfen, ob ein Graph planar ist.

Möglicher Vortragsplan

(1) Erklären Sie die Grundzüge der Graphentheorie.

(2) Definieren Sie planare Graphen.

(3) Beweisen Sie die Eulersche Polyederformel und zeigen Sie das K_5 und $K_{3,3}$ nicht planar sind.

(4) Beweisen Sie den Satz von Kuratowski.

(*) Die Graphentheorie ist sehr anwendbar und praxisrelevant. Nehmen Sie sich ruhig etwas Zeit, auch diese Aspekte zu diskutieren.

(†) Falls es zeitlich passt und Sie interessiert, können Sie z.B. auch den Algorithmus von Hopcroft and Tarjan [HT74] diskutieren.

Literatur

[AZ15] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise.* Springer Spektrum, 2015. DOI: 10.1007/978-3-662-44457-3. Zbl: 1297.00006 (cit. on p. 10)

[HT74] J. Hopcroft and R. Tarjan. *Efficient planarity testing. Journal of the Association for Computing Machinery* 21 (1974), pp. 549–568. DOI: 10.1145/321850.321852. Zbl: 0307.68025 (cit. on p. 11)

[Ihr02] T. Ihringer. *Diskrete Mathematik.* Berliner Studienreihe zur Mathematik 9. Heldermann Verlag, 2002. Zbl: 1021.05001 (cit. on p. 10)

[Kre19] D. L. Kreher. *Combinatorics and Graph Theory.* 2019. (cit. on p. 10)

7

Themenvorschlag: Der Algorithmus von Dijkstra

Ein gewichteter Graph ist ein abstrakter Graph dessen Kanten mit Gewichten versehen sind. Jedem Pfad in einem gewichteten Graph lässt sich eine Länge zu ordnern: die Summe der Gewichte der enthaltenen Kanten. Die Frage ist nun: Was ist der kürzeste Weg zwischen zwei gegeben Ecken? Diese Frage ist hochrelevant: man denke nur an die Routenplanung. Dijkstra [Dij59] entwickelte eine Algorithmus (d.h. ein systematisches Verfahren) zur Lösung dieses Problems im Jahre 1956. Wie für jeden Algorithmus stellen sich auch für den von Dijkstra folgende Fragen: arbeitet der Algorithmus immer zuverlässig (Korrektheit) und wie effizient ist der Algorthimus (Komplexität) [Ihr02, Kapitel II §1 und §3].

Möglicher Vortragsplan

(1) Erklären Sie das Konzept der gewichteten Graphen im Detail.

(2) Erklären Sie den Algorithmus von Dijkstra.

(3) Beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus von Dijkstra.

(4) Diskutieren Sie das Konzept der Komplexität von Algorithmen.

(5) Diskutieren Sie die Komplexität des Algorithmus von Dijkstra.

Literatur

[Dij59] E. W. Dijkstra. *A note on two problems in connexion with graphs. Numerische Mathematik* 1.1 (1959), pp. 269–271. DOI: 10.1007/bf01386390 (cit. on p. 12)

[Ihr02] T. Ihringer. *Diskrete Mathematik.* Berliner Studienreihe zur Mathematik 9. Heldermann Verlag, 2002. Zbl: 1021.05001 (cit. on p. 12)

8
Themenvorschlag: Minimale Spannbäume

Keywords: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Graphentheorie, Algorithmen

Ein Graph ist ein Baum, falls er zusammenhängent ist und keine Kreise enthält. Ein minimale Spannbäum in einem gewichteten Graphen ist ein Untergraph, der alle Ecken enthält, selbst ein Baum ist und dessen Gesamtkantengewicht minimal ist. Man sieht leicht, dass jeder (zusammenhängende) gewichtete Graph einen minimale Spannbäum enthält. Die Frage wie man einen solchen effizient berechnen kann ist offenbar sehr relevant (man denke nur an das Verlegen elektrischer Leitungen unter Straßen). Daher erstaunt es nicht, dass eine Vielzahl von entsprechenden Algorithmen bekannt ist. Einer der ersten wurde 1926 von Borůvka entwickelt, um die Stromversorgung in Mähren zu planen. Am wohl bekanntesten ist der Algorithmus von Kruskal [Ihr02, Kapitel II §5]. Zu allen Algorithmen sollte man sich fragen, ob sie überhaupt korrekt sind und wie schnell/effizient sie sind. Diese Fragestellungen lassen sich an Algorithmen zur Berechnung von minimalen Spannbäumen gut illustrieren.

Möglicher Vortragsplan

(1) Erklären Sie der minimalen Spannbäume im Detail.

(2) Erklären und vergleichen Sie die Algorithmen von Borůvka und Kruskal.

(3) Beweisen Sie die Korrektheit einer dieser beiden Algorithmen.

(4) Diskutieren Sie die Laufzeit einer dieser beiden Algorithmen.

(*) Sie können gern auch noch weitere Algorithmen zur Berechnung von minimalen Spannbäumen besprechen, z.B. den von Prim.

Literatur

[Ihr02] T. Ihringer. *Diskrete Mathematik.* Berliner Studienreihe zur Mathematik 9. Heldermann Verlag, 2002. Zbl: 1021.05001 (cit. on p. 13)

9
Themenvorschlag: Cayleys Formel

Keywords: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Graphentheorie, Kombinatorik

---

Cayleys Formel besagt, dass es genau 2^{n-2} bezeichnete Bäume mit n Blättern gibt [Cay88]. Diese berühmte Formel der abzählenden Kombinatorik lässt sich auf unzählige Arten beweisen:

(1) Prüfer [Prü18] beschreibt jeden bezeichneten Baum mit n Blättern eindeutig durch genau einen binären Code der Länge $n-2$, den Prüfer-Code. Dies konstruiert eine Bijektion der abzuzählenden Menge mit einer Menge die offensichtlich 2^{n-2} Elemente hat. Eine Variation diese Arguments, die auf Joyal [Joy81] zurück geht, findet man in [AZ15, Kapitel 30].

(2) Ein bezeichneter Baum mit n Blättern nichts anders als ein bezeichneter Spannbaum des vollständigen Graphen K_n. Der Satz von Kirchhoff erlaubt die Berechnung Anzahl der bezeichneten Spannbäume eines beliebigen Graphs als ein beliebiger Kofaktor der entsprechenden Laplace–Matrix. Das reduziert das Problem auf die Berechnung einer Determinante, die mittels des Satzes von Binet–Cauchy erfolgen kann. Dieses Argument findet man ebenso in [AZ15, Kapitel 30].

(3) Auch einen rekursiven Beweis, der auf Rényi [Rén59] and Riordan [Rio68] zurück geht, findet man in [AZ15, Kapitel 30].

(4) Schließlich findent man in [AZ15, Kapitel 30] noch einen weiteren Beweis. Dieser benutzt die Methode des doppelten Abzählens. Hier bei handelt es sich um eine besonders clevere Idee, die in der abzählenden Kombinatorik oft zum Einsatz kommt.

Siehe auch [Ihr02, Kapitel I 3.4].

Möglicher Vortragsplan

(1) Erklären Sie im Detail die Aussage des Satzes von Cayley und alle darin enthaltenen Begriffe.

(2) Diskutieren Sie im Detail die oben erwähnten Beweise (bzw. eine Auswahl).

Literatur

[AZ15] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise.* Springer Spektrum, 2015. DOI: 10.1007/978-3-662-44457-3. Zbl: 1297.00006 (cit. on p. 14)

[Cay88] A. Cayley. *A theorem on trees. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 23 (1888), pp. 376–378 (cit. on p. 14)

[Ihr02] T. Ihringer. *Diskrete Mathematik.* Berliner Studienreihe zur Mathematik 9. Heldermann Verlag, 2002. Zbl: 1021.05001 (cit. on p. 14)

[Joy81] A. Joyal. *Une théorie combinatoire des séries formelles. Advances in Mathematics* 42 (1981), pp. 1–82. DOI: 10.1016/0001-8708(81)90052-9. Zbl: 0491.05007 (cit. on p. 14)

[Prü18] H. Prüfer. *Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. Archiv der Mathematik und Physik. 3. Reihe* 27 (1918), pp. 142–144 (cit. on p. 14)

[Rén59] A. Rényi. *Some remarks on the theory of trees. Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* 4 (1959), pp. 73–85. Zbl: 0093.37604 (cit. on p. 14)

[Rio68] J. Riordan. *Forests of labeled trees. Journal of Combinatorial Theory* 5 (1968), pp. 90–103. DOI: 10.1016/S0021-9800(68)80033-X. Zbl: 0157.55001 (cit. on p. 14)

10
Themenvorschlag: Satz von Bolyai-Gerwien

Keywords: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Geometrie Polygone

Zwei Polygone heißen **zelegungsgleich** falls sie beide eine endliche Unterteilung in gleichviele jeweils kongruente Dreicke haben. Der Satz von Bolyai-Gerwien besagt, dass zwei Polygone genau dann zerlegungsgleich sind wenn sie den gleichen Flächeninhalt haben. Beweise diese Satzes finden Sie z.B. in [Bol78, pp. 49–56] und [Hop89, Chapter IV]. Die Verallgemeinerung des Satzes von Bolyai-Gerwien in höhere Dimensionen *ist falsch*. Dies ist der Inhalt des dritten Hilbertschen Problems und wurde von Dehn bewiesen. Eine Diskussion dieses Problems und seiner Lösung finden Sie in [AZ15, Kapitel 9].

Möglicher Vortragsplan

(1) Erklären die Aussage des Satzes von von Bolyai-Gerwien im Detail.

(2) Beweisen Sie den Satz von Bolyai-Gerwien.

(*) Falls es die Zeit erlaubt, sollte Sie außerdem kurz das dritte Hilbertsche Problem andiskutieren.

Literatur

[AZ15] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise.* Springer Spektrum, 2015. DOI: 10.1007/978-3-662-44457-3. Zbl: 1297.00006 (cit. on p. 16)

[Bol78] V. G. Boltyanskii. *Hilbert's third problem.* Scripta Series in Mathematics. John Wiley & Sons, 1978. Zbl: 0388.51001 (cit. on p. 16)

[Hop89] Heinz Hopf. *Differential geometry in the large.* Lecture Notes in Mathematics 1000. Springer-Verlag, 1989. Zbl: 0669.53001 (cit. on p. 16)

11
Themenvorschlag: Das Assoziahedron

`Keywords`: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Kombinatorik, Polytope

Eine binäre Operation $A \times A \ni (a, b) \mapsto ab \in A$ ist assoziativ, falls $(ab)c = a(bc)$. Der Ausdruck abc ist also unmissverständlich, da jede der beiden Klammerungen das selbe Produkt ergibt. Nun stellt sich die Frage ob auch für $a_1, \ldots, a_n \in A$ jede beliebige Klammerung von $a_1 \ldots a_n$ das selbe Produkt ergibt, d.h. ob das allgemeine Assoziativgesetz gilt. *Natürlich* lautet die Antwort ja, aber zum einen ist das nicht absolut trivial und zum anderen öffnet dieses möglicherweise kleinlich wirkende Frage das Tor zu einer Menge interesanter Mathematik.

Das Assoziahedron K_n $(n \geqslant 3)$ ist ein zunächst abstraktes Polytop dessen Ecken den zulässigen Klammerungen von $a_1 \ldots a_n$ entsprechen, zwischen zwei dieser Ecken gibt es eine Kante, falls die Klammerungen durch eine einfache Anwendung des Assoziativgesetz $(ab)c = a(bc)$ in einander übergehen, usw. Das Assoziahedron wurde von Tamari [Tam54] entdeckt und von Stasheff [Sta63] wiederendeckt (und wird daher manchmal auch Stasheff-Polytop genannt). Die Frage ob das allgemeine Assoziativgesetz gilt ist nun äquivalent zu der Frage ob K_n zusammenhängend ist oder nicht.

Bisher ist das Assoziahedron ein abstraktes Polytop. Für $n = 3, 4$ ist es noch sehr leicht zusehen, dass K_n geometrisch realisiert wird (durch ein Interval und ein Pentagon). Für $n = 5$ wird die Sache schon etwas kompliziert (aber machbar). Es stellt sich die Frage: Kann man K_n immer konkret geometrisch realisieren? Die Antwort ist: ja und zwar auf sehr viele Arten und Weisen. Loday [Lod04] fand eine sehr schöne und vergleichsweise einfache Konstruktion. Sie benutzt die Äquivalenz zwischen zulässigen Klammerungen von $a_1 \ldots a_n$ und verwurzelten binären Bäumen mit genau n Blättern. In [CSZ15] findet man eine Übersicht zu Realisierungen des Assoziahedron.

Das Assoziahedron K_n ist $(n - 2)$–dimensional und hat daher Seiten der Dimensionen $0, 1, \ldots, n - 2$: die 0–dimensionalen entsprechen den Ecken, die 1–dimensionalen entsprechen den Kanten, usw. Nun kann man sich Fragen: Was ist die Anzahl der k–dimensionalen Seiten von K_n? Die Antwort für $k = 0$ sind die catalanschen Zahlen. Im allgemeinen erhält man die Schröder–Hipparchus-Zahlen. Diese sind faszinierende Zahlenfolgen, welche in vielfältigen kombinatorischen Problemen auftreten, z.B. beim Invertieren von Potenzreihen der Form $x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots$.

Möglicher Vortragsplan

(1) Erklären Sie genau was das Assoziahedron ist.

(2) Erklären Sie was eine verwurzelter binärer Baum ist.

(3) Diskutieren Sie den Zusammenhang des Assoziahedron mit verwurzelten binären Bäumen.

(4) Beweisen Sie das allgemeine Assoziativgesetz, d.h. dass alle Assoziahedra zusammenhängend sind.

(5) Beschreiben Sie Lodays geometrische Realisierung des Assoziahedron (oder skizzieren Sie diese wenigstens).

(6) Erklären Sie was die catalanschen Zahlen sind und wieso diese die Anzahl der Ecken des Assoziahedron angeben. Als Zusatz können Sie diese Diskussion auf die Schröder–Hipparchus-Zahlen erweitern.

Literatur

[CSZ15] C. Ceballos, F. Santos, and G. M. Ziegler. *Many non-equivalent realizations of the associahedron. Combinatorica* 35.5 (2015), pp. 513–551. DOI: 10.1007/s00493-014-2959-9. Zbl: 1389.52013 (cit. on p. 17)

[Lod04] J.-L. Loday. *Realization of the Stasheff polytope. Archiv der Mathematik* 83.3 (2004), pp. 267–278. DOI: 10.1007/s00013-004-1026-y. Zbl: 1059.52017 (cit. on p. 17)

[Sta63] J. D. Stasheff. *Homotopy associativity of H–spaces. I, II. Transactions of the American Mathematical Society* 108 (1963), pp. 275–292, 293–312. DOI: 10.2307/1993608. Zbl: 0114.39402 (cit. on p. 17)

[Tam54] D. Tamari. *Monoides préordonnés et chaînes de Malcev. Bulletin de la Société Mathématique de France* 82 (1954), pp. 53–96. DOI: 10.24033/bsmf.1446. Zbl: 0055.01501 (cit. on p. 17)

12

Themenvorschlag: Die Platonischen Körper

Keywords: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Elementargeometrie, Kombinatorik, Algebra

Die Platonischen Körper sind die regulären (d.h.: alle Flächen sind kongruent und selbst reguläre Polygone) konvexen Polyeder im dreidimensionalen Raum. Davon gibt es genau fünf: das Tetraeder, das Hexaeder, das Oktaeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder. Die Existenz dieser Objekte kann man z.B. durch direkte Konstruktion in kartesichen Koordinaten nachweisen. Dass es nur genau diese fünf Platonischen Körper gibt, lässt sich auf vielfältige Arten verstehen. Ein elementargeometrischer Beweis basierend auf einer Analyse der Winkeldefekte geht auf Euklid zurück. Ein weiterer topologischer Beweis basiert auf der Eulerschen Polyederformel $V - E + F = 2$; siehe z.B. [AZ15, Kapitel 12] und [AF15, §1.5.4]. Eine Variation diese Beweises macht die enge Verbindung zur Theorie der (planaren) Graphen offensichtlich (siehe z.B. [Ihr02, Kapitel I 4.12 und 4.13]).

Die Platonischen Körper sind geometrisch sehr interessant. Man kann z.B. sich eingehend mit der Berechnung ihrer Oberflächen, Volumen, etc. befassen. Darüber hinaus gibt es eine gewisse Dualität zwischen den Platonischen Körpern. Die Platonischen Körper sind hochgradig symmetrisch. Ihre Symmetriegruppen spielen eine wichtige Rolle in der Klassifikation der endlichen Untergruppen von $\mathrm{SO}(3)$, die Gruppe der Rotationen im dreidimensionalen Raum.

Offenbar lässt sich das Konzept der Platonischen Körper auf vielfältige Arten modifizieren. Die Archimedischen Körper z.B. sind die halbregulären (d.h.: alle Flächen sind selbst reguläre Polygone und in jeder Ecke treffen sich jeweils die gleiche Anzahl jeder Art regelmäßiger Polygone) konvexen Polyeder. Andere Variationen sind die catalanischen Körpern und die regulären (möglicherweise nicht konvexen) Polyeder.

Möglicher Vortragsplan

(1) Definieren Sie den Begriff der Platonischen Körper und alle relevanten Konzepte sorgfältig.

(2) Konstruieren Sie die fünf Platonischen Körper und weisen Sie nach dass Ihre Konstruktion wirklich Platonischen Körper ergibt.

(3) Diskutieren Sie mindestens zwei Beweise der Klassifikation der Platonischen Körper.

(4) Diskutieren Sie die geometrischen oder/und kombinatorischen Eigenschaften der Platonischen Körper oder/und ihre Symmetriegruppen.

(5) Beschreiben Sie eine odere mehrere Variationen des Konzepts der Platonischen Körper. Erklären Sie welche neuen geometrischen Objekte dadurch hinzukommen und wieso.

(*) Die Platonischen Körper beschäftigen die Mathematiker schon seit der Antike. Dementsprechend finden Sie viele kleine historische Anekdoten. Außerdem finden sich die Platonischen Körper (aus vielfältigen Gründen) in der Natur, Physik, usw. Zögern Sie nicht, Ihren Vortrag dadurch zu bereichern.

Literatur

[AF15] I. Agricola and T. Friedrich. *Elementargeometrie.* Springer Spektrum, 2015. DOI: 10.1007/978-3-658-06731-1. Zbl: 1302.51001 (cit. on p. 19)

[AZ15] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise.* Springer Spektrum, 2015. DOI: 10.1007/978-3-662-44457-3. Zbl: 1297.00006 (cit. on p. 19)

[Ihr02] T. Ihringer. *Diskrete Mathematik.* Berliner Studienreihe zur Mathematik 9. Heldermann Verlag, 2002. Zbl: 1021.05001 (cit. on p. 19)

13
Themenvorschlag: Ebene kristallographische Gruppen

Keywords: Vertiefungsseminar für das Lehramt, Elementargeometrie

Eine ebene kristallographischen Gruppe ist die Symmetriegruppen von periodischen Muster der Ebene $\mathbf{R}^2$. *Präziser:* ebene kristallographischen Gruppe ist eine diskrete Untergruppe Γ der ebenen Transformationsgruppe $O(2) \ltimes \mathbf{R}^2$ (erzeugt durch Spiegelungen, Drehungen und Translationen). Bis auf Äquivalenz gibt genau 17 dieser Gruppen. Diese Gruppen spielen (selbstverständlich) eine wichtige Rolle in der ebenen Kristallographie aber auch in der Kunst, denn sie beschreiben die 17 grundsätzlich möglichen periodischen Tapetenmuster. Eine schöne Diskussion finden Sie in Agricola and Friedrich [AF15, §2.7] (und auch die umliegenden Teile dieses Buchs sollten Sie durchlesen).

Möglicher Vortragsplan

(1) Beschreiben Sie die 17 ebenen kristallographischen Gruppen und skizzieren Sie die entsprechenden periodischen Muster der Ebene $\mathbf{R}^2$.

(2) Beweisen sie die Klassifikation der ebenen kristallographischen Gruppen. (Das ist etwas, aber nicht übermäßig, aufwändig und recht interessant.)

(*) Sie finden viele künstlerische und naturwissenschaftliche Illustrationen der ebene kristallographischen Gruppen bzw. der entsprechenden periodischen Muster. Diese können Sie gern in Ihren Vortrag ein bauen.

Eine kleine Warnung Da die ebene kristallographischen Gruppen in vielen Gebieten der Wissenschaft eine Rolle spielen, haben sich eine ganze Schar von Notationssystemen entwickelt. *Verstricken Sie sich nicht darin!*

Literatur

[AF15] I. Agricola and T. Friedrich. *Elementargeometrie.* Springer Spektrum, 2015. DOI: 10.1007/978-3-658-06731-1. Zbl: 1302.51001 (cit. on p. 21)